Anmerkungen zum Werk ZUSAMMENGESETZTE RAKETEN von Johannes Winkler

von

Prof. Dr.-Ing. Philipp Epple

Fakultät Maschinenbau und Automobiltechnik

Hochschule für angewandte Wissenschaften Coburg

Stand: 06.05.2024

Einleitung

Die Anregung dieses Thema zu bearbeiten habe ich auf Tagungen der Raumfahrtgeschichte im Hermann-Oberth-Raumfahrtmuseum in Feucht erhalten. Dort hat seit längerer Zeit Dr. Reinhard Sagner zu Leben und Werk von Johannes Winkler aus historischer Sicht Vorträge gehalten. Hieraus entwickelte sich die Fragestellung, ob es nicht möglich ist, die wissenschaftlich-technischen Ergebnisse aus heutiger Sicht nachzuvollziehen. Der Direktor des Museums, Herr Karlheinz Rohrwild, stand diesem Vorhaben sehr aufgeschlossen gegenüber und hat mir das dort vorhandene Material zur Verfügung gestellt. Auch Dr. Sagner war immer wieder bei der Ausarbeitung der Anmerkungen ein wertvoller Gesprächspartner.

Diese Anmerkungen beziehen sich auf das Werk *Zusammengesetzte Raketen* von Johannes Winkler, (Winkler, 1981). Es ist nicht der Anspruch dieser Anmerkungen, eine vollständige zahlenmäßige Überprüfung der von Winkler in diesem Werk vorgestellten Formeln und Ergebnisse vorzunehmen. Die numerische Richtigkeit der Ergebnisse wurde in Einzelfällen, aber nicht für jedes Ergebnis, überprüft. Es geht in diesen Anmerkungen vielmehr darum, die von Winkler angewandten wissenschaftlichen Methoden und die damit hergeleiteten Formeln und vorgestellten Ergebnisse grundsätzlich nachzuvollziehen.

Allgemein kann vorab festgestellt werden, dass Winkler das Thema der zusammengesetzten Raketen und die dazugehörige Mathematik beherrschte. Der Autor dieser Anmerkungen hat alle wesentlichen Berechnungen von Winkler in diesem Werk Schritt für Schritt nachgerechnet und konnte keine relevanten Fehler feststellen. Der mathematische Formalismus von Winkler ist nach Ansicht des Verfassers korrekt und entspricht dem Wissen seiner Zeit. Sollte der Verfasser dieser Anmerkungen irgendetwas übersehen oder trotz sorgfältiger Arbeit falsch zitiert oder berechnet haben, ist er für entsprechenden fundierten Hinweis der Lesenden dankbar.

Hinweise zum Literaturverzeichnis

Winkler macht in seinem Werk (Winkler, 1981) fünf Literaturangaben, Goddard (Goddard, 1919), Oberth (Oberth, 1925) und noch drei Berichte. Im Werk von Winkler wird aber keine Referenz auf diese Literaturstellen gemacht, so dass der Leser selbst überprüfen muss, was im Werk „Zusammengesetzte Raketen“ von Winkler ist und was aus diesen Literaturstellen stammt. Der Verfasser dieser Anmerkungen konnte die Literaturstellen (Goddard, 1919) und (Oberth, 1925) einsehen und nach bestem Wissen feststellen, dass die Berechnung der zusammengesetzten Raketen wie von Winkler im Abschnitt 2 in seinem Werk dargestellt ist, in diesen Literaturstellen nicht enthalten ist.

Es muss noch erwähnt werden, dass in diesen Anmerkungen zum Werk von Winkler nur der technische Inhalt des Werkes von Winkler nachgerechnet und überprüft wurde, unabhängig davon, ob diese Inhalte schon zu seiner Zeit bekannt waren oder nicht. Dem Verfasser dieser Anmerkungen ist aber keine Literaturstelle bekannt, in der die Berechnungen für die zusammengesetzten Raketen, wie unten im Einzelnen noch erläutert, enthalten sind, auch nicht in der neueren Literatur.

Die mathematische Berechnung der Bündelung der Rakete

Winkler geht von der Raketengleichung aus und schlüsselt die Anfangs- und die Endmasse in das Leergewicht A, das Treibstoffgewicht T und die Nutzlast N auf, siehe Abbildung 1.

Mit diesem Ansatz schreibt Winkler die Raketengleichung als Gl (1)

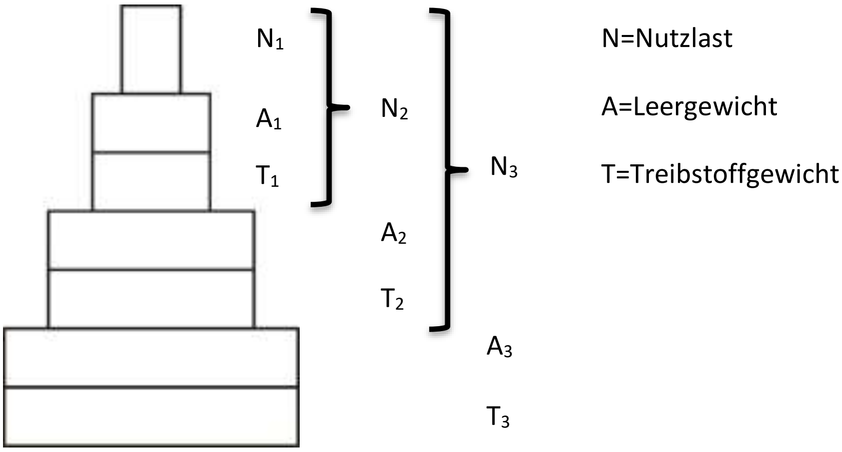

Abbildung 1: Stufenrakete nach Winkler (Winkler, 1981)

$$v = c\ ln\frac{A+T+N}{A+N}\ , \qquad (1)$$

wobei v die Raketengeschwindigkeit und c Ausströmgeschwindigkeit der Verbrennungsgase aus dem Triebwerk sind. Dieses Prinzip wendet er anschließend auf mehrere Stufen an und leitet die Gleichung für die Stufenrakete her, Gl. (2)

$$v = c\ \left(ln\frac{N_1+A_1+T_1}{N_1+A_1} + ln\frac{N_1+A_1+T_1+A_2+T_2}{N_1+A_1+T_1+A_2} + \cdots + ln\frac{N_1+A_1+T_1+A_2+T_2 \ldots +A_n+T_n}{N_1+A_1+T_1+A_2+\cdots+A_n}\right). \qquad (2)$$

Diese Gleichungen sind auch in etwas anderer Darstellung in den modernen Lehrbüchern zu finden, wie z.B. in (Anderson, 2005) und (Sforza, 2016). Sie entsprechen auch dem vorhandenen Wissen seiner Zeit. Insbesondere die Aufteilung des Gewichtes in Nutzlast, Leergewicht und Treibstoffgewicht entspricht der gängigen Betrachtungsweise.

Neben der Anwendung der Raketengleichung auf mehrere Stufen, wie sie auch in den Lehrbüchern zu finden ist, leitet Winkler im Abschnitt 2 in seinem Werk Zusammengesetzte Raketen (Winkler, 1981) aber auch noch die Gleichungen für das Aggregat aus mehreren gleichartigen Raketen in einer Stufe her, d.h. parallel in einer Stufe jeweils gebündelt. Wenn Winkler über zusammengesetzte Raketen schreibt, meint er in diesem Abschnitt parallel zusammengesetzte oder gebündelte Triebwerke, die Winkler im Text auch als Treibkörper bzw. Raketen bezeichnet. Aus den Formeln geht aber immer ganz klar hervor, wann Triebwerke gemeint sind, auch wenn von Treibkörpern oder Raketen die Rede ist und wann die Rakete gemeint ist. Diese Mehrfachbezeichnung stellt aber keinerlei Schwierigkeit oder Nachteil für das Verständnis der Herleitungen dar.

In modernen Lehrbüchern wird dieses Thema auch als parallele Stufen bezeichnet. Winkler hat diese für beliebig viele parallel in einer Stufe gebündelte Triebwerke oder Raketen hergeleitet. Im Gegensatz hierzu, findet man in der Literatur in der Regel nur wenige gebündelte Raketen, wie z.B. bei der amerikanischen DELTA Rakete oder der russischen SOYUZ Rakete, siehe auch (Tewari, 2007). Oft wird hier zudem eine Massenstrom gemittelte Ausströmgeschwindigkeit c_{Mittel} berechnet, die dann in Gleichung (1) eingesetzt wird, um die Raketengeschwindigkeit v zu bestimmen. In manchen Büchern wird aber auch nach Treibstoff-, Anlagen- und Nutzlastgewicht aufgeschlüsselt, meistens aber dann nur für eine geringe Anzahl an parallelen Triebwerken, (Tewari, 2007). Im Gegensatz hierzu hat Winkler die parallelen Triebwerke allgemein hergeleitet, d.h. für eine beliebige Anzahl an Triebwerken, was mathematisch gesprochen zu einer Lösung mit einer geometrischen Reihe geführt hat. Diese Herleitung ist dem Autor dieser Anmerkungen nur aus dem Werk von Winkler bekannt.

Die in diesem Abschnitt von Winkler hergeleiteten Formeln sind in modernen Lehrbüchern allgemein in dieser Form, soweit dem Autor dieser Anmerkungen bekannt, daher nicht zu finden. Es gibt bei den Winkler Formeln zwar die Einschränkung, dass die parallelen oder gebündelten Triebwerke gleichartig

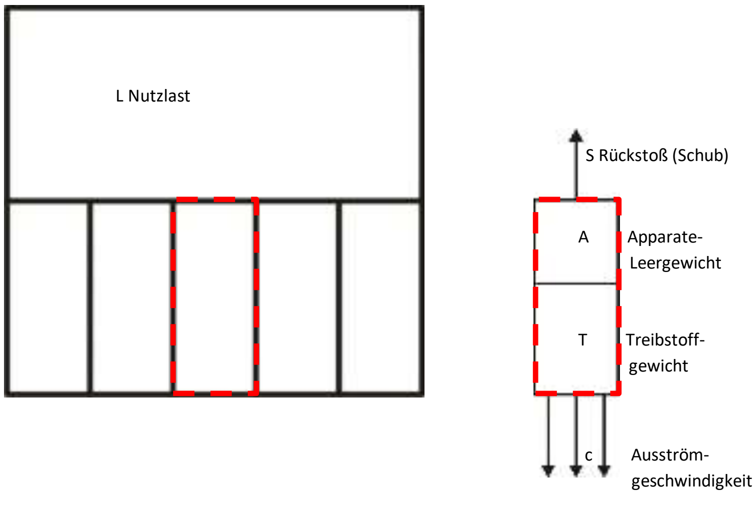

Abbildung 2: Gebündelte Raketen bzw. Triebwerke nach Winkler (Winkler, 1981)

sein müssen, d.h. denselben Schub erzeugen bzw. insgesamt gleich sein müssen, dafür aber können beliebig viele Triebwerke gebündelt werden, siehe Abbildung 2.

Entscheidend bei der Herleitung von Winkler ist aber, dass bei der Bündelung der Triebwerke Winkler diese weiterhin aufgeschlüsselt in Apparateleer- und Treibstoffgewicht betrachtet sowie die Nutzlast berücksichtigt. Ferner nimmt Winkler mit dem Faktor α eine Raketenbeschleunigung $\propto g$ an, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Damit errechnet Winkler den Gesamtschub der Rakete als

$$Sz_1 = \propto [L + z_1(A + T)], \qquad (3)$$

wobei z_1 die Anzahl der Triebwerke darstellt. Winkler leitet die nun daraus folgenden Gleichungen in diesem Abschnitt wie in einem Lehrbuch her, man kann sagen, mustergültig. Es gibt keine überflüssigen Berechnungen und es fehlt auch keine Berechnung. Es ist hier keine Differential- oder Integralrechnung erforderlich, Winkler wendet hier Algebra und die Theorie der geometrischen Reihen an, dieses macht er aber wie aus dem Lehrbuch. Zunächst erweitert Winkler die Raketengleichung für eine Schicht von Treibkörpern, das Ergebnis ist eine erweiterte Raketengleichung

$$v = c\, ln \frac{S/T}{S/T - \propto} \ . \qquad (4)$$

Hier ist S/T das Verhältnis von Rückstoß (Schub) zu Treibstoffgewicht, α ist der Faktor, um den der Rückstoß größer als die Gewichtskraft ist und c ist die Ausströmgeschwindigkeit der Verbrennungsgase aus dem Triebwerk bzw. den Treibkörpern. Zitat aus (Winkler, 1981):

Dieses Aggregat mit nur einer Treibkörperschicht leistet nicht mehr als eine ungeteilte Rakete, nur dass man die Sache auch mit Raketen mittlerer Größe oder gar kleinerer Abmessungen bewerkstelligen kann.

Damit hat Winkler einen Vorteil der Bündelung von Triebwerken beschrieben. Diese aufgeschlüsselte Form der Raketengleichung für eine Stufe mit mehrfachen Triebwerken ist, soweit dem Autor dieser Anmerkungen bekannt, wie bereits erwähnt, in den gängigen Lehrbüchern der Raumfahrtechnik nicht enthalten. Es gibt zwar den Fall der parallelen Stufen, der in den Lehrbüchern beschrieben wird, dieser bezieht sich aber in der Regel auf Raketen mit Boostern, d.h. mit drei oder wenige parallelen Triebwerken, wie z.B. in Abbildung 3 zu sehen.

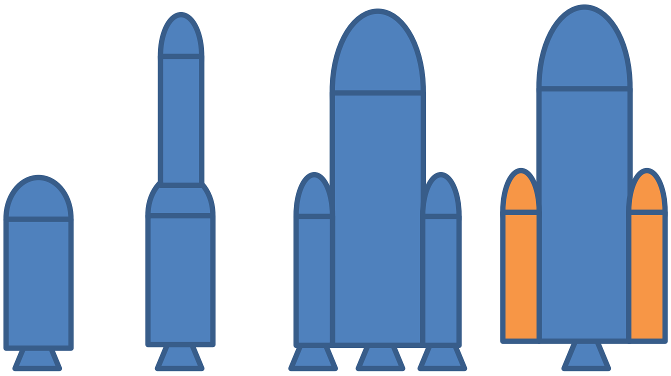

Abbildung 3: Von links nach rechts: Einstufige Rakete, gestapelte Zweistufenrakete, einstufige Rakete mit Boostern, Rakete mit abwurfbaren Außentanks.

Außerdem sind die „gebündelten“ Raketen mit Boostern in der Literatur oft einstufig, bei der Theorie von Winkler werden pro Stufe mehrere Raketen gebündelt und dann mehrstufig ausgeführt, siehe Abbildung 4. Die parallelen Stufen werden in der Literatur auch oft, wie bereits oben beschrieben, nach dem zweiten Newtonschen Gesetz addiert und daraus ergibt sich eine Massenstrom gemittelte Ausströmgeschwindigkeit c_{Mittel} am Triebwerk, die dann in die Raketengleichung (1) eingesetzt wird. Dieses Verfahren ist bewährt und auch sinnvoll. Winkler löst aber die Aufgabe der gebündelten Raketen für beliebig viele Triebwerke und Stufen (Schichten) und aufgeschlüsselt in Apparateleer- und Treibstoffgewicht, Nutzlast sowie die Raketenbeschleunigung $\propto g$. Soweit dem Autor dieser Anmerkungen bekannt, gibt es das in dieser Form in keinem Lehrbuch. Diese allgemeine Betrachtung führt dann zu dem in der Darstellung von Winkler wichtigen Reduktionsfaktor μ, auf den weiter unten noch eingegangen wird.

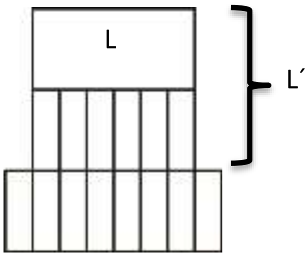

Abbildung 4: Gebündelte Raketen bzw. Treibkörper in zwei Stufen nach Winkler (Winkler, 1981)

Indem Winkler die Triebwerke der folgenden Schichten als Nutzlast in seinen Berechnungen einbezieht, siehe Abbildung 4, geht er auch davon aus (diese Annahme wird aber nicht ausdrücklich erwähnt), dass jede Stufe zur selben Geschwindigkeitszunahme führt. Hierbei bleibt auch die Beschleunigung der Rakete von Stufe zu Stufe dieselbe. Somit beschleunigt die Rakete gleichmäßig mit derselben Beschleunigung ($\propto g$) weiter und die Endgeschwindigkeit wird entsprechend immer weiter erhöht. Damit lassen sich höhere Geschwindigkeiten erreichen. Winkler zeigt, dass bei dieser Vorgehensweise die Anzahl der Triebwerke von Stufe zu Stufe in einem geometrischen Verhältnis stehen. Die Herleitung ist sehr klar und verständlich, so wie in einem Lehrbuch. Hier kommt die Summenformel einer geometrischen Reihe zur Anwendung und die Gesamtzahl der Triebwerke nach Winkler ist

$$Z = z_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{5}$$

wobei q das Verhältnis der Anzahl der Triebwerke von einer zur anderen Stufe, d.h.

$$q = \frac{z_2}{z_1} = \cdots = \frac{z_n}{z_{n-1}}. \tag{6}$$

Winkler zeigt, dass dieses Verhältnis gleich

$$q = \frac{L + z_1(A+T)}{L} \tag{7}$$

ist. Die Endgeschwindigkeit, welche durch n Schichten erreicht wird, ist somit nach Winkler

$$V = nv. \tag{8}$$

Über die Zeitdauer einer jeden Stufe wird keine Aussage gemacht, was aber für diese Berechnungen auch nicht relevant ist.

Die Raketenkennziffer

Um die Effizienz einer Rakete zu beurteilen, wird nun die Gesamtzahl Z, siehe Gl.(5), der Triebwerke mit dem Treibstoffgewicht T des einzelnen Triebwerks multipliziert, um das gesamte Treibstoffgewicht zu bestimmen

$$B = TZ = Tz_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{9}$$

Durch Einsetzen der Anzahl der Raketen in der ersten Schicht z_1 aus Gl.(3), dem geometrischen Faktor q nach Gl.(7), die Anzahl der Stufen n gemäß Gl.(8) und die Geschwindigkeitszunahme je Stufe v gemäß Gl.(4) und durch teilen durch die Nutzlast L, ergibt sich nach Winkler, nach einigen algebraischen Umformungen und Einführung des Reduktionsfaktors μ

$$\frac{B}{L} = \frac{1}{1 - A/T}\left(e^{\frac{v}{\mu c}} - 1\right) \tag{10}$$

mit

$$\mu = \frac{ln(S/T) - ln\left[\frac{S}{T} - \propto (1 + A/T)\right]}{ln(S/T) - ln\left(\frac{S}{T} - \propto\right)} \tag{11}$$

und mit Briggschen Logarithmen

$$\mu = \frac{log(S/T) - log\left[\frac{S}{T} - \propto (1 + A/T)\right]}{log(S/T) - log\left(\frac{S}{T} - \propto\right)}. \tag{12}$$

Gl. (10) stellt das gesamten Treibstoffgewicht B bezogen auf das Nutlastgewicht L dar. Weshalb Winkler lieber mit Briggschen Logarithmen (d.h. Logarithmen auf Basis 10) als mit natürlichen Logarithmen (Basis ist die Eulersche Zahl e=2,71828…) arbeitet, lässt sich aus dem Werk nicht erschließen. Es geht vermutlich auf seine persönliche Präferenz zurück, mit Briggschen statt mit natürlichen Logarithmen zu arbeiten. Vielleicht auch deshalb, weil sich die Grafiken damit besser ablesen lassen. Es spielt aber auch keine Rolle, weil der Basisumrechnungsfaktor konstant ist und sich aus dem Bruch ohnehin heraus kürzt und somit an den Formeln formal nichts ändert. Gl. (11) und Gl.(12) sehen identisch aus, bis auf ln (natürlicher Logarithmus) und log (Briggscher Logarithmus).

Winkler trägt den Reduktionsfaktor in seinem Werk Zusammengesetzte Raketen auch graphisch als Funktion auf. Überprüft man die Grafik von Winkler z.B. in Microsoft Excel, siehe Abbildung 5, so wird ersichtlich, dass die Grafik von Winkler perfekt ist, es können keinerlei Abweichungen festgestellt werden. Es zeigt sich auch hier die präzise Arbeitsweise von Winkler. Für die Grafiken und alle weiteren Berechnungen wählt Winkler den Beschleunigungsfaktor α=4, d.h. die Raketenbeschleunigung wird als das Vierfache der Erdbeschleunigung, d.h. 4g gewählt, was jeder gesunde Mensch aushalten müsste.

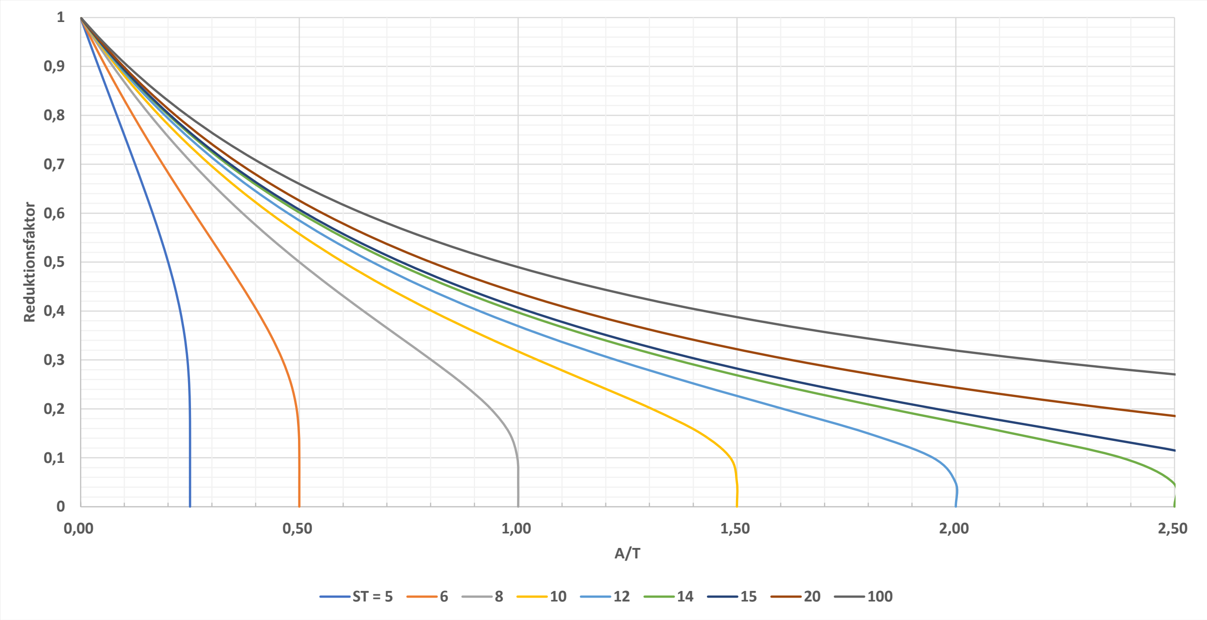

Abbildung 5: Grafische Überprüfung des Reduktionsfaktors von Winkler.

Ferner zeigt Winkler, dass Gl. (10) zur Beurteilung von Raketen weiter vereinfacht werden kann, weil die Exponentialfunktion gegenüber dem Term A/T im Nenner und dem Term (-1) im Klammerausdruck überwiegt, was Winkler noch anhand einer Grafik in seinem Werk verdeutlicht. Es muss aber erwähnt werden, dass für jeden, der mit der Mathematik und dem Verhalten von Exponentialfunktionen vertraut ist, dieser Zusammenhang ohnehin klar ist. Auch hier zeigt aber Winkler, wie sehr er bemüht ist, alles lückenlos zu erklären, was ihm auch gelingt. Damit lässt sich die Gleichung für die gebündelten Raketen in die Form der einfachen Raketengleichung bringen:

$$V = \mu c \, ln \frac{(T+A)Z+L}{L}. \qquad (13)$$

Im Zähler steht die Anfangsmasse $m_1 = (T + A)Z + L$ und im Nenner die Endmasse L. Daher ist nach Winkler

$$V = \mu c \, ln \frac{m_1}{m_2}. \qquad (14)$$

Diese Gl.(14) unterscheidet sich von der einfachen Raketengleichung

$$v = c \, ln \frac{m_1}{m_2} \qquad (15)$$

vor allem durch den Reduktionsfaktor μ. Somit kommt Winkler zum folgenden wichtigen Ergebnis (Winkler, 1981):

Da μ stets kleiner als 1 ist, ist die zusammengesetzte Rakete der einfachen Rakete gegenüber im Nachteil. Es ist dies gewissermaßen der Kaufpreis, den man für die beträchtliche Hinausschiebung der Reichweitengrenze zu zahlen hat.

Aus der Raketengleichung für gebündelte Raketen, Gl.(14), ergibt sich nach Winkler die Raketen-kennzahl

$$\mu c = W. \qquad (16)$$

Aus Gl. (12) und Gl.(16) ergibt sich die von Winkler gesuchte Kennzahl W

$$W = c\,\frac{log(S/T) - log\left[\frac{S}{T} - \propto (1 + A/T)\right]}{log(S/T) - log\left(\frac{S}{T} - \propto\right)}\ . \qquad (17)$$

Damit legt Winkler optimale Raketenkonfigurationen aus. Winkler verwendet nun wieder die Bedingung der konstanten Beschleunigung für alle Stufen und leitet den Ausdruck für den Rückstoß bzw. Schub den Endrückstoß oder Endschub S_{ω} bezogen auf den Schub eines Triebwerks her

$$\frac{S_{\omega}}{S} = 1 - \frac{\propto}{S/T}. \qquad (18)$$

Den Luftwiderstand vernachlässigt Winkler bei diesen Berechnungen, was ja auch für die Herleitung der allgemeinen Raketengleichung der Fall und üblich ist. Es reicht, um die wesentlichen Zusammenhänge zu erkennen und erste Berechnungen durchzuführen.

Verzeichnis von Raketen und deren Kennzahlen

In diesem Abschnitt wendet nun Winkler die entwickelte Theorie auf seinerzeit bestehende Raketen und Raketenprojekte an. Hierfür stellt er Tabelle 1 in seinem Werk zusammen. Diese Tabelle wurde vom Verfasser dieser Anmerkungen überprüft, siehe Abbildung 6. Die wesentlichen Gleichungen, die hierfür erforderlich sind, sind die Gleichung für den Reduktionsfaktor, Gl. (12) und für die Raketenkennzahl, Gl. (16) und Gl. (17).

Es lassen sich keine nennenswerten Abweichungen zwischen den Berechnungen von Winkler und der Nachrechnung vom Verfasser dieser Anmerkungen feststellen. Wären diese identisch, so wäre die letzte Spalte 16 identisch 1, die bestehenden Abweichungen gehen vermutlich nur auf Rundungsfehler zurück, zumal Winkler noch mit dem Rechenschieber und der Verfasser dieser Anmerkungen (Epple) mit Microsoft Excel am Computer gerechnet hat. Aus der Tabelle in Abbildung 6 ist ersichtlich, dass die Raketen A1 bis A10 die Kontrollbedingungen 1 und 2, Spalten 9 und 10, nicht erfüllen. Somit ergeben sich hier auch weder eine Reduktionszahl μ noch eine Kennzahl W, was auch den Angaben von Winkler entspricht. Das kann aber sowohl am Beschleunigungsfaktor $\propto$ wie auch an den Verhältnissen S/T und A/T liegen. Setzt man nur als Beispiel α=2, so ergeben sich wieder reale Werte für μ und W für diese Aggregate.

Spalte:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		Winkler	Winkler	Winkler	Winkler	Epple	Epple	Epple	Epple	Epple	Winkler	Winkler	Winkler	Winkler	Epple	Epple
			Alpha	4												
									Kontrolle 1	Kontrolle 2					Probe	
Nr.	Bezeichnung	A	T	S	c	S/T	A/T	µ	S/T-a	S/T-a(1+A/T)	v	W	Hersteller	Betriebsstoff	µ=W/c	µProbe/µ
1	Feuerwerksrakete	0,04	0,015	4,8	470	320,000	2,667	0,268107588	316,000	305,333333	149	124	Schwarzpulver		0,26382979	1,02
2	Brander	0,065	0,07	0,66	720	9,429	0,929	0,323841736	5,429	1,71428571	526	239	Gebr.Bock,Be	Mehlpulver	0,33194444	0,98
3	Startrakete	2,75	1,95	110	1186	56,410	1,410	0,392415655	52,410	46,7692308	638	465	Eisfeld,Silberh	Pulver	0,3920742	1,00
4	HW 1	2,4	1,2	8,6	485	7,167	2,000	#ZAHL!	3,167	-4,83333333	196	-	Winkler	fl.Methanu.fl.Sauerstoff	#WERT!	#ZAHL!
5	HW 2	7,2	36	98	1275	2,722	0,200	#ZAHL!	-1,278	-2,07777778	2270	-	Winkler	fl.Methanu.fl.Sauerstoff	#WERT!	#ZAHL!
6	HW 2/2	5,7	10	98	1275	9,800	0,570	0,512270249	5,800	3,52	1330	675	Winkler	fl.Methanu.fl.Sauerstoff	0,52941176	0,97
7	Enzian 1-2-3	590	2	0	1510	0,000	295,000	#ZAHL!	-4,000	-1184			HWK	Gaso,SV-Stoff(u.T-Stoff)	0	#ZAHL!
8	Enzian 4	100	600	2000	1750	3,333	0,167	#ZAHL!	-0,667	-1,33333333	3400	-	Techn.Hochsc	Visolu.Salbei	#WERT!	#ZAHL!
9	Startrak.zu Enzian	80	41,2	1500	1780	36,408	1,942	0,298130469	32,408	24,6407767	726	529		Pulver	0,29719101	1,00
10	Wasserfall	1715	1985	7800	1780	3,929	0,864	#ZAHL!	-0,071	-3,52644836	1365	-	PeenemÃ¼nd	Optolineu.SV-Stoff	#WERT!	#ZAHL!
11	Rheintochter I	1520	230	4000	1780	17,391	6,609	#ZAHL!	13,391	-13,0434783	250	-	Rheinmetall-E	Pulver	#WERT!	#ZAHL!
12	Startrakete dazu	410	252	75000	1750	297,619	1,627	0,376439775	293,619	287,111111	840	776	Rheinmetall-E	Pulver	0,44342857	0,85
13	Rheintochter III	115	415	1780	1780	4,289	0,277	#ZAHL!	0,289	-0,81927711	2710	-	Rheinmetall-E	Visolu.SV-Stoff	#WERT!	#ZAHL!
14	Startrakete dazu	150	70,6	14000	1750	198,300	2,125	0,313008763	194,300	185,8017	676	543	Rheinmetall-E	Pulver	0,31028571	1,01
15	Hs 117 u. Hs 117 H	98,87	81,25	380	1510	4,677	1,217	#ZAHL!	0,677	-4,19052308	920	-	HWK	Gasou.SV-Stoff	#WERT!	#ZAHL!
16	Startrakete dazu	7,5	37,5	1750	1780	46,667	0,200	0,825612857	42,667	41,8666667	3200	1475	HWK	Pulver	0,82865169	1,00
17	Hs 117 u. Hs 117 H	65	71,9	380	1720	5,285	0,904	#ZAHL!	1,285	-2,3310153	1030	-	BrW	Tonkau.Salbei	#WERT!	#ZAHL!
18	Startrakete dazu	8	37	1750	1780	47,297	0,216	0,814103575	43,297	42,4324324	3080	1460	BMW	Pulver	0,82022472	0,99
19	Nußknacker		13	230	1750	17,692	#WERT!	#WERT!	13,692	#WERT!			Rheinmetall-E	Pulver	0	#WERT!
20	Startrakete dazu	49	21	5670	1960	270,000	2,333	0,294718604	266,000	256,666667	645	568	Rheinmetall-E	Pulver	0,28979592	1,02
21	x-4	14	8,5	150	1510	17,647	1,647	0,280527887	13,647	7,05882353	722	422	BMW	Tonkau.Salbei	0,2794702	1,00
22	x-7	2,4	0,8	65	1750	81,250	3,000	0,230199755	77,250	65,25	500	406	BMW	Pulver	0,232	0,99
23	Hecht	15,75	9,25	76	1272	8,216	1,703	#ZAHL!	4,216	-2,59459459	587	-	LFA	1ethano1u.Stickoxydul	#WERT!	#ZAHL!
24	Taifun	11,1	11,9	600	1400	50,420	0,933	0,496594315	46,420	42,6890756	920	700	BMW	Visolu.Salbei	0,5	0,99
25	BV 143	80	237,92	1500	1633	6,305	0,336	0,534595577	2,305	0,9596503	1622	865	HWK	Gasou.T-Stoff	0,52969994	1,01
26	A 4 (V 2)	4000	8757	27000	1960	3,083	0,457	#ZAHL!	-0,917	-2,74386205	2270		PeenemÃ¼nd	Alkoholu.fl.Sauerstoff	0	#ZAHL!
27	A 1	126	24	300	1960	12,500	5,250	#ZAHL!	8,500	-12,5	342	-	HWA	Alkoholu.fl.Sauerstoff	#WERT!	#ZAHL!
28	A 2	126	24	300	1960	12,500	5,250	#ZAHL!	8,500	-12,5	342	-	HWA	Alkoholu.fl.Sauerstoff	#WERT!	#ZAHL!
29	A 3	412	338	1500	1960	4,438	1,219	#ZAHL!	0,438	-4,43786982	1172	-	HWA	Alkoholu.fl.Sauerstoff	#WERT!	#ZAHL!
30	A 5 und A 6	415	335	1500	1960	4,478	1,239	#ZAHL!	0,478	-4,47761194	1150	-	Alkoholu.fl.Sauerstoff		#WERT!	#ZAHL!
31	A 7	465	335	1500	1960	4,478	1,388	#ZAHL!	0,478	-5,07462687	1064	-	PeenemÃ¼nd	Alkoholu.fl.Sauerstoff	#WERT!	#ZAHL!
32	A 9	4500	8500	25000	1960	2,941	0,529	#ZAHL!	-1,059	-3,17647059	2080	-	PeenemÃ¼nd	Alkoholu.fl.Sauerstoff	#WERT!	#ZAHL!
33	A 10	37000	50000	200000	1960	4,000	0,740	#ZAHL!	0,000	-2,96	1670	-	PeenemÃ¼nd	Alkoholu.fl.Sauerstoff	#WERT!	#ZAHL!
34	Hs 293	72	63,4	600	1053	9,464	1,136	0,235805388	5,464	0,92113565	670	240	HWK	Z-Stoffu.T-Stoff	0,22792023	1,03
35	Hs 294, Hs 295	96,2	36,8	610		16,576	2,614	0,134272004	12,576	2,11956522			Schmidding	Methanolu.gasf.Sauerstoff	#DIV/0!	#DIV/0!
36	Hs 296	84	66	1200	1780	18,182	1,273	0,358453971	14,182	9,09090909	1032	622	WASAG	Pulver	0,3494382	1,03
37	Hs 298	16	11	150	1530	13,636	1,455	0,272745924	9,636	3,81818182	802	397	Schmidding	Pulver	0,25947712	1,05
38	Feuerlilie F 25	46	17	500	1750	29,412	2,706	0,208480911	25,412	14,5882353	552	385	LFA	Pulver	0,22	0,95
39	Feuerlilie F 55	240	210	6400	1633	30,476	1,143	0,426051246	26,476	21,9047619	1023	685	Tonkau.Salbei		0,41947336	1,02
40	LV 1		17	500	1813	29,412	#WERT!	#WERT!	25,412	#WERT!			Rheinmetall-E	Pulver	0	#WERT!
41	LV 2		16,6	500	1813	30,120	#WERT!	#WERT!	26,120	#WERT!			Rheinmetall-E	Pulver	0	#WERT!
42	R 205	76				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!			HWK	Z-Stoffu.T-Stoff	#DIV/0!	#DIV/0!
43	109-509A, R II 211	170				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!			HWK	C-Stoffu.T-Stoff	#DIV/0!	#DIV/0!
44	109-509A-1	170				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!			HWK	C-Stoffu.T-Stoff	#DIV/0!	#DIV/0!
45	109-509A- 2, Natter	170				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!			HWK	C-Stoffu.T-Stoff	#DIV/0!	#DIV/0!
46	1 09-509B	201				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!			HWK	C-Stoffu.T-Stoff	#DIV/0!	#DIV/0!
47	109-509C	200				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!			HWK	C-Stoffu.T-Stoff	#DIV/0!	#DIV/0!
48	109-718 80 1 780					#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!			BMW	Tonkau.Salbei	#DIV/0!	#DIV/0!
49	109-500 RI 201	120	157	500	933	3,185	0,764	#ZAHL!	-0,815	-3,87261146	774	-	HWK	Z-Stoffu.T-Stoff	#WERT!	#ZAHL!
50	109-501 RI 203	219,3	267	1000	1650	3,745	0,821	#ZAHL!	-0,255	-3,54007491	1314	-	HWK	Gaso,Z-Stoff,B-Stoffu	#WERT!	#ZAHL!
51	109-502RI209	225,5	267	1500	1650	5,618	0,845	#ZAHL!	1,618	-1,76029963	1291	-	HWK	Gaso,Z-Stoff,B-St.u.T-Stoff	#WERT!	#ZAHL!
52	3374	24,8	45,2	600	1690	13,274	0,549	0,570436816	9,274	7,07964602	1758	964	BWK	Tonkau.Salbei	0,5704142	1,00
53	LT1500	818	466	800	1780	1,717	1,755	#ZAHL!	-2,283	-9,30472103	802	-	HWK	Gasou.T-StoffPulver	#WERT!	#ZAHL!
54	109-522	59	33	2000	1780	60,606	1,788	0,335785042	56,606	49,4545455	792	587	WASAG	Pulver	0,32977528	1,02
55	109-532	16	6,05	440	1780	72,727	2,645	0,252871451	68,727	58,1487603	566	445	WASAG	Pulver	0,25	1,01
56	109-393	24,5	16,5	750	1780	45,455	1,485	0,373309071	41,455	35,5151515	911	658	Schmidding	Pulver	0,36966292	1,01
57	109-573	8,2	3,3	100	1780	30,303	2,485	0,229741559	26,303	16,3636364	598	409	Schmidding	Pulver	0,22977528	1,00
58	109-563	24,5	16,5	500	1780	30,303	1,485	0,356137496	26,303	20,3636364	911	632	Schmidding	Pulver	0,35505618	1,00
59	109-505	31,5	16,5	500	1780	30,303	1,909	0,292179845	26,303	18,6666667	748	516	Rheinmetall-E	Pulver	0,28988764	1,01
60	109-515	51	33	1000	1780	30,303	1,545	0,345721255	26,303	20,1212121	890	615	Rheinmetall-E	Pulver	0,34550562	1,00
61	RL503	42	17,2	500	1730	29,070	2,442	0,230695787	25,070	15,3023256	561	415		Pulver	0,23988439	0,96
62	Standard-Rakete	333	1000	10000	1960	10,000	0,333	0,67050297	6,000	4,668	2700	1310	(Vorschlag Wi	Orthotoluidin u. Salpetersäure	0,66836735	1,00

Abbildung 6: Nachrechnung der Tabelle 1 von Winkler durch Epple

Aufbau eines Triebwerks für extrem große Gesamtleistungen

In diesem Abschnitt rechnet Winkler als Beispiel eine Standardrakete für eine hohe Leistung mit folgenden Kenndaten vor:

L = 1.000 kg = 1 t, V = 11.750 m/s, S = 10 t, T=1 t, A=0,333 t, c=1.960 m/s und einer Brenndauer von 25 Sek.

Die Berechnungen von Winkler lassen sich einfach in einer Tabellenkalkulation nachvollziehen, siehe Nachrechnung von Epple in Tabelle 1.

Tabelle 1: Nachrechnung vom Beispiel Winkler nach Epple

Alpha	4	
L	1	t
S	10	t
T	1	t
A	0,333	t
V	11750	m/s
c	1960	m/s
S/T	10	
A/T	0,333	
µ	0,67050297	
B/L	5.729,22	
v	1.001	m/s
n	11,74	
z1	0,85689803	
q	2,14224507	
zn	3.055,22	
f	0,09	m2
F	274,97	m2

Winkler rechnet mit 3.700 Triebwerken, um die Brennzeit von 25 Sek zu erreichen. In Abb. 9 im Werk von Winkler (Winkler, 1981) zeigt er auch noch, wie die Raketen in wenigen Stufen angeordnet werden können, damit die Rakete eine aerodynamische Form erhält. In einer von Winkler angegebenen Referenz, nämlich das Buch von Goddard (Goddard, 1919), sind in Fig. 7 auch gebündelte Raketen dargestellt, allerdings nur das allgemeine Prinzip und nicht schon mit einer aerodynamischen Form.

Nun berechnet Winkler noch den Luftwiderstand mit der Mittelwertkurve von Siacci, was richtig ist. Für den Widerstandsbeiwert setzt er C_w=0,2 an, was möglicherweise etwas niedrig angesetzt ist, aber grundsätzlich ist die Rechnung richtig. Eine Korrektur der Luftwichte mit der Höhe nach DIN 5450 nimmt Winkler auch vor.

Das Berechnungsbeispiel ist somit grundsätzlich richtig, einzig die Annahmen könnten auch andere sein. Ob die Wahl der Parameter optimal ist, kann anhand der Angaben nicht genau nachvollzogen werden. Winkler liefert aber Argumente, dass diese zumindest plausibel sind.

Zusammenfassung

Im Abschnitt 1 stellt Winkler das Problem der Stufen vor und zeigt die Lösung für beliebig viele Stufen. Die Lösung dieser Aufgabe ist auch aus der Literatur bekannt und sowohl in älteren als auch in modernen Lehrbüchern enthalten. Winkler entwickelt aber in seinem Werk „Zusammengesetze Rakete“, im Anschnitt 2, auch die allgemeine mathematische Lösung für die in einer Stufe gebündelten Raketen bzw. Triebwerken. Diese allgemeine, d.h. für beliebig viele gebündelte Triebwerke in einer Stufe, mathematische Berechnung der zusammengesetzten bzw. gebündelten Triebwerken gibt es in der Form, in denen vom Autor dieser Anmerkungen eingesehenen Büchern, die Winkler in seinem Werk angegeben hat, d.h. in (Goddard, 1919) und (Oberth, 1925), nicht. In der modernen Literatur der Raketentechnik konnte der Autor dieser Anmerkungen diese auch nicht finden. In der modernen Literatur gibt es zwar den Fall der parallelen Stufen, dieser bezieht sich aber in der Regel auf Raketen mit Boostern, d.h. auf den Fall einer sehr kleinen Anzahl von Treibkörpern im Bündel. Die parallel gebündelten Triebwerke in einer Stufe werden in der Literatur auch oft, wie bereits oben beschrieben, nach dem zweiten Newtonschen Gesetz addiert und daraus ergibt sich eine Massenstrom gemittelte Ausströmgeschwindigkeit c_{Mittel} am Triebwerk, die dann in die Raketengleichung (1) eingesetzt wird. In manchen Büchern wird auch nach Treibstoff-, Anlagen- und Nutzlastgewicht aufgeschlüsselt, meistens aber dann nur für eine geringe Anzahl an parallelen Stufen (Tewari, 2007). Dieses Verfahren ist bewährt und auch sinnvoll. Winkler löst aber die Aufgabe der gebündelten Raketen für beliebig viele Triebwerke und Stufen (Schichten) und aufgeschlüsselt in Apparateleer- und Treibstoffgewicht, Nutzlast sowie die Raketenbeschleunigung $\propto g$. Weil in den modernen Büchern über die Raketentechnik das Stufenproblem für beliebig viele Stufen gelöst ist, das Problem der parallel in einer Stufe gebündelten Triebwerken hingegen nur für eine geringe Anzahl an gebündelten Triebwerken bzw. nur nach dem 2. Newtonschen Gesetz gemittelt berechnet wird, ist der Autor dieser Anmerkungen der Meinung, dass darüber nachgedacht werden sollte, diese vollständigere Lösung der gebündelten Raketen von Winkler künftig auch noch in den modernen Standardwerken der Raketentechnik aufzunehmen, allein schon der Vollständigkeit halber, unabhängig vom einzelnen Anwendungsfall. Auf der Grundlage, der in Abschnitt 2 hergeleiteten allgemeinen Formel für gebündelte Triebwerke, entwickelt Winkler im Abschnitt 3 die Raketenziffer, die die Berechnung der erreichten maximalen Geschwindigkeit einer gebündelten Rakete als Funktion der wesentlichen Parameter ermöglicht. Diese wendet Winkler auf das ihm zugängliche Verzeichnis von Raketen seiner Zeit an.

Literaturverzeichnis

Anderson, J. D. (2005). *Introduction to Floght.* New York: McGraw-Hill.

Goddard, R. H. (1919). *A Method of Reaching Extreme Altitudes.* Washington: Published by the Smithsonian Institution.

Oberth, H. (1925). *Die Rakete zu den Planetenräumen, 2. Auflage.* München.

Sforza, P. M. (2016). *Manned Spacecraft Design Principles.* Oxford: Elsevier.

Tewari, A. (2007). *Atmospheric and Space Flight Dynamics.* Boston: Birkhäuser.

Winkler, J. (1981). *Zusammengesetzte Raketen.* Braunschweig: Deutsche Luft- und Raumfahrt, DLR Mitteilung 81-02.